# limits in comma category

Re menal

2021 年 7 月 9 日

- 圏は locally small であるとする．
- 圏 $I$ に対して，射の集まり $\mathrm{Mor}(I)$ が集合であるとき $I$ を小圏という．
- $K : I \to C,\ L : J \to C$ が関手のとき，各 $j \in J$ に対し関手 $Q : K \downarrow Lj \to K \downarrow L$ を $(i, Ki \to Lj) \mapsto (i, j, Ki \to Lj)$ で定義する．

**補題.** $U$ を圏，$C, D$ を小圏，$F : C \to D,\ E : C \to U$ を関手とする．このとき $\operatorname{colim} E \cong \operatorname{colim} F^{\dagger}E$ が成り立つ．

*Proof.* $\Delta : U \to U^C,\ \Delta' : U \to U^D$ をそれぞれ対角関手とすれば，任意の $u \in U$ に対し $\Delta' u \circ F = \Delta u$ が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(\operatorname{colim} E, u) &\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, \Delta u) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, \Delta' u \circ F) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^{\dagger}E, \Delta' u) \\
&\cong \mathrm{Hom}_U(\operatorname{colim} F^{\dagger}E, u).
\end{aligned}$$

よって $\operatorname{colim} E \cong \operatorname{colim} F^{\dagger}E$ が成り立つ． □

**定理 1.** $C$ を圏，$D$ を余完備な圏，$I, J$ を小圏，$K : I \to C,\ L : J \to C$ を関手とする．このとき，図式 $T : K \downarrow L \to D$ に対して

$$\operatorname{colim} T \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \operatorname{colim}(K \downarrow Lj \xrightarrow{Q} K \downarrow L \xrightarrow{T} D)$$

が成り立つ．

*Proof.* Step1 : $j \in J$ とし，$P_1 : K \downarrow L \to J,\ P_0' : P_1 \downarrow j \to K \downarrow L$ をコンマ圏から標準的に定まる関手とする．このとき，コンマ圏 $P_1 \downarrow j$ の普遍性（[1] 命題 7）から，ある関手 $H : K \downarrow Lj \to P_1 \downarrow j$ が一意的に存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "j"] & J \\
 & P_1 \downarrow j \arrow[u] \arrow[r, "P_0'"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \theta"] & K \downarrow L \arrow[u, "P_1"'] \\
K \downarrow Lj \arrow[uur, bend left] \arrow[ur, "H"] \arrow[urr, bend right, "Q"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "j"] & J \\
 & & K \downarrow L \arrow[u, "P_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow \mathrm{id}"] \\
K \downarrow Lj \arrow[uur, bend left] \arrow[urr, bend right, "Q"'] & &
\end{tikzcd}$$

Step2 : $H' : P_1 \downarrow j \to K \downarrow Lj$ を，

$$((i_0, j_0, Ki_0 \xrightarrow{s_0} Lj_0), j_0 \xrightarrow{t_0} j) \mapsto (i_0, Ki_0 \xrightarrow{s} Lj_0 \xrightarrow{Lt_0} Lj)$$

とすることで定義すれば，明らかにこれは関手になる．$x = ((i_0, j_0, Ki_0 \xrightarrow{s_0} Lj_0), j_0 \xrightarrow{t_0} j) \in P_1 \downarrow j$, $y = (i_1, Ki_1 \xrightarrow{s_1} Lj) \in K \downarrow Lj$ とおく．

(i) $f \in \mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y)$ に対し $\varphi(f) = (f, t_0)$ とおくと，写像 $\varphi : \mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y) \to \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy)$ が定まることを示す．まず，コンマ圏における射と関手 $H'$ の定義より，$f$ は $I$ の射 $f : i_0 \to i_1$ であって次の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} Ki_0 \arrow[dd, "Kf"'] \arrow[dr, "Lt_0\circ s_0"] & \\ & Lj \\ Ki_1 \arrow[ur, "s_1"'] & \end{tikzcd}$$

すなわち，次の 2 つの図式が可換.

$$\begin{tikzcd} Ki_0 \arrow[r, "s_0"] \arrow[d, "Kf"'] & Lj_0 \arrow[d, "Lt_0"] \\ Ki_1 \arrow[r, "s_1"'] & Lj \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} j_0 \arrow[dd, "t_0"'] \arrow[dr, "t_0"] & \\ & j \\ j \arrow[ur, "\mathrm{id}_j"'] & \end{tikzcd}$$

これは $\varphi(f) = (f, t_0)$ が $P_1 \downarrow j$ における $x$ から $Hy$ への射であることを意味するから，写像 $\varphi : \mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y) \to \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy)$ が得られた.

(ii) $P_0 : K \downarrow L \to I$ を標準的に定まる関手とする．$g = (g_0, g_1) \in \mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y)$ に対し $\psi(g) = P_0 g$ とおくと写像 $\psi : \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy) \to \mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y)$ が定まることを示す．まず，$g = (g_0, g_1)$ は $g_0 : i_0 \to i_1$，$g_1 : i_1 \to j$ であって次の 2 つの図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} Ki_0 \arrow[r, "s_0"] \arrow[d, "Kg_0"'] & Lj_0 \arrow[d, "Lg_1"] \\ Ki_1 \arrow[r, "s_1"'] & Lj \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} j_0 \arrow[dd, "g_1"'] \arrow[dr, "t_0"] & \\ & j \\ j \arrow[ur, "\mathrm{id}_j"'] & \end{tikzcd}$$

すなわち，次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} Ki_0 \arrow[dd, "Kg_0"'] \arrow[dr, "Lt_0\circ s_0"] & \\ & Lj \\ Ki_1 \arrow[ur, "s_1"'] & \end{tikzcd}$$

これは射 $g_0 = P_0 g : i_0 \to i_1$ が $K \downarrow Lj$ における $H'x$ から $y$ への射であることを意味するから，写像 $\psi : \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy) \to \mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y)$ が定まった.

(iii) 上で定めた写像 $\varphi$ が $x \in P_1 \downarrow j$ について自然であることを示す．そのために $\varphi$ を改めて $\varphi_x$ とかき，$x = ((i_0, j_0, Ki_0 \xrightarrow{s_0} Lj_0), j_0 \xrightarrow{t_0} f)$，$x' = ((i'_0, j'_0, Ki'_0 \xrightarrow{s'_0} Lj'_0), j'_0 \xrightarrow{t'_0} j) \in P_1 \downarrow j$ とし，$(p_0, p_1) : x \to x'$

を射とする．このとき，次の図式が可換であればよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x', y) \arrow[r, "\varphi_{x'}"] \arrow[d, "-\circ H'(p_0,p_1)"'] & \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x', Hy) \arrow[d, "-\circ(p_0,p_1)"] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f, t_0') \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Hom}_{K\downarrow j}(H'x, y) \arrow[r, "\varphi_x"'] & \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy) & f\circ p_0 \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{c}(f\circ p_0, t_0'\circ p_1)\\ (f\circ p_0, t_0)\end{array}
\end{tikzcd}
$$

ここで，$(p_0, p_1)$ が $P_1 \downarrow j$ における射であることから $t_0' \circ p_1 = t_0$ が成り立つ．ゆえに上の図式が可換であることが分かった．

(iv) 次に $\varphi$ が $y \in K \downarrow Lj$ について自然であることを示す．(iii) と同様に $\varphi$ を改めて $\varphi_y$ とかき，$y = (i_1, Ki_1 \xrightarrow{s_1} Lj)$，$y' = (i_1', Ki_1' \xrightarrow{s_1'} Lj) \in K \downarrow Lj$ とし，$q : y \to y'$ を射とする．このとき，次の図式が可換であればよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y) \arrow[r, "\varphi_y"] \arrow[d, "q\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy) \arrow[d, "Hq\circ-"] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f, t_0) \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Hom}_{K\downarrow j}(H'x, y') \arrow[r, "\varphi_{y'}"'] & \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy') & q\circ f \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{c}Hq\circ(f, t_0)\\ (q\circ f, t_0)\end{array}
\end{tikzcd}
$$

ここで，$H$ の定め方より $Hq = (q, \mathrm{id}_j)$ で，よって $Hq \circ (f, t_0) = (q \circ f, t_0)$．したがって上の図式が可換となり，$\varphi_y$ が $y$ について自然となる．

以上の (i) から (iv) の議論により，$x \in P_1 \downarrow j$，$y \in K \downarrow Lj$ について自然な同型 $\mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x, y) \cong \mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x, Hy)$ が存在することがわかる．すなわち $H$ は関手 $H'$ の右随伴関手である．

Step3：Step2 で $H$ が右随伴関手であることが分かったが，右随伴関手は終関手である（[3] 命題 7）から $H$ は終関手である．したがって，$Q = P_0' \circ H$ より，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{colim}_{j\in J} \mathrm{colim}(K \downarrow Lj \xrightarrow{Q} K \downarrow L \xrightarrow{T} D) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{j\in J} \mathrm{colim}(K \downarrow Lj \xrightarrow{H} P_1 \downarrow j \xrightarrow{P_0'} K \downarrow L \xrightarrow{T} D) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{j\in J} \mathrm{colim}(P_1 \downarrow j \xrightarrow{P_0'} K \downarrow L \xrightarrow{T} D)
\end{aligned}
$$

ここで，各点左 Kan 拡張より $P_1^\dagger T(j) \cong \mathrm{colim}(P_1 \downarrow j \xrightarrow{P_0'} K \downarrow L \xrightarrow{T} D)$ である（[2] 定理 4）から，これと補題を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{colim}_{j\in J} \mathrm{colim}(P_1 \downarrow j \xrightarrow{P_0'} K \downarrow L \xrightarrow{T} D) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{j\in J} P_1^\dagger T(j) \\
&\cong \mathrm{colim}\, T
\end{aligned}
$$

となり，結局 $\operatorname{colim} T \cong \operatorname{colim}_{j\in J} \operatorname{colim}(K\downarrow Lj \xrightarrow{Q} K\downarrow L \xrightarrow{T} D)$ が得られた.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "j"] & J \arrow[dr, "P_1^{\dagger}F"] & \\
 & P_1\downarrow j \arrow[u] \arrow[r, "P_0'"] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\theta"] & K\downarrow L \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & D \\
K\downarrow Lj \arrow[uur, bend left] \arrow[ur, "H"] \arrow[urr, bend right, "Q"'] \arrow[ur, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

## 参考文献


[1] alg-d, 『コンマ圏』, `http://alg-d.com/math/kan_extension/comma.pdf`

[2] alg-d, 『Kan 拡張』, `http://alg-d.com/math/kan_extension/kan_extension.pdf`

[3] alg-d, 『随伴関手定理』, `http://alg-d.com/math/kan_extension/aft.pdf`

[4] M. Kashiwara, P. Shapira, “Categories and Sheaves”, Springer, 2006